



Paysages Fractals

Cédric Bonhomme
Avec : Jean-Charles Bettinger
Encadré par: Dominique Michel

7 mai 2008

Table des matières

1	Introduction	2
2	Généralités et notions fractaliennes	3
2.1	Trois grandes catégories de fractales	3
2.2	Principales caractéristiques	5
2.3	Dimension topologique	6
2.4	Dimension d'un objet fractal	6
2.4.1	Exemple avec la courbe de Koch	8
3	Les paysages fractales	12
3.1	Techniques de génération	12
3.1.1	Systèmes de fonctions itérées	12
3.1.2	Technique à base de plaquage de texture	19
3.1.3	Techniques basées sur un modèle d'érosion	20
3.1.4	Déplacement du point médian	23
3.2	Mesure de dimension fractale	27
3.2.1	Calcul du périmètre et de l'aire du flocon de von Koch	27
3.2.2	Calcul de la dimension fractale d'un relief	28
4	Conclusion	29

Chapitre 1

Introduction

En 1623 Galilée disait "l'univers est écrit dans un langage, celui des mathématiques, ces lettres étant des triangles, des cercles et toutes sortes de figures géométriques". En 1982 Benoît Mandelbrot déclarait "Les nuages ne sont pas sphériques, les montagnes coniques, les côtes des cercles".

Ainsi est née la géométrie fractale. Aujourd'hui les fractales figurent parmi les objets les plus curieux du monde mathématique. Les fractales semblent bien être le meilleur outil pour décrire la nature (paysages, nuages, forêts). On y invente dans la mémoire des ordinateurs des paysages à la fois réalistes et fantastiques constitués de montagnes, ciels nuageux, lacs et forêts du plus bel effet.

Le domaine des paysages fractals a été abordé très tôt par **Mandelbrot**. Les méthodes fractales sont considérées comme les plus efficaces pour la création d'images réalistes d'objets naturels. La synthèse d'images est à la fois un moyen et un but dans la recherche scientifique actuelle : un moyen de comprendre des phénomènes en les modélisant numériquement, en les visualisant lorsqu'ils sont invisibles ou complexes et un but par la beauté des images générées.

Dans un premier temps nous allons aborder quelques notions importantes afin de pouvoir convenablement traiter ce sujet. Dans un second temps nous allons faire l'état de l'art des diverses techniques de génération de paysage fractals.

Chapitre 2

Généralités et notions fractaliennes

Dans cette partie nous allons élucider quelques notions primordiales et tenter de définir ce qu'est une fractale.

2.1 Trois grandes catégories de fractales

Les fractales peuvent être réparties en trois grandes catégories :

- les systèmes de fonctions itérées. Ceux-ci ont une règle de remplacement géométrique fixe (l'ensemble de Cantor, le tapis de Sierpinski, le triangle de Sierpinski, la courbe de Peano, le flocon de Koch) par exemple les fougères ;
- les fractales définies par une relation de récurrence en chaque point dans un espace (tel que le plan complexe). Des exemples de ce type sont les ensembles de Mandelbrot et la fractale de Lyapunov ;
- les fractales aléatoires, générées par des processus stochastiques et non déterministes, par exemples les *paysages fractales*.

Les fractales déterministes ne font pas apparaître de composante aléatoire (Sierpinski).

Les fractales stochastiques, au contraire, permettent de générer des dessins non réguliers. Pour générer une fractale stochastique, on n'a plus un seul mode de répllication, mais deux ou plusieurs choisis aléatoirement.

Une approche intuitive consiste à considérer qu'une fractale est la transformation récursive d'un objet par n copies de lui même à l'échelle r (avec

$r < 1$).

Cette propriété est appelée l'*autosimilarité*.

Définition 2.1.1 (Autosimilarité) *Un objet autosimilaire est un objet qui conserve sa forme, quelle que soit l'échelle à laquelle on l'observe.*



Le chou de Romanesco (ou brocoli à pomme) est un très bel exemple d'autosimilarité. Chaque pointe ressemble au chou-fleur entier.

Les objets autosimilaires sont souvent appelés fractales. *L'expression **autosimilaire** n'est pas encore reconnue par l'Académie. On devrait utiliser l'expression anglaise **self-similar**.*

Il existe alors deux types de similitudes :

- autosimilitude parfaite : lorsque, à toutes les échelles, les motifs sont rigoureusement identiques, tout comme l'illustre le Flocon de Koch ;
- autosimilitude approchée ou statistique :
 - approchée : peut désigner une fractale, comme l'ensemble de Mandelbrot, dans laquelle des motifs et des structures générales se répètent à toutes les échelles ;
 - statistique : désigne généralement une propriété d'objet concret qui semble se comporter comme des objets possédant une autosimilitude approchée à nos échelles d'observation humaine. En effet, à partir de l'image d'un nuage, par exemple, il sera difficile de dire à quelle échelle à été prise la photographie.

Le premier concept mathématique d'autosimilitude n'a que peut de valeur aux yeux du physicien pour qui la matière est quantifiée et, à l'échelle nanoscopique, la matière ne peut avoir le même aspect que le motif à grande échelle.

Cependant le dernier concept d'autosimilarité ne correspond pas à la vision mathématique car, bien que l'on retrouve, en effet, des structures générales identiques à nos échelles, à l'échelle nanoscopique, les structures intimes de la matière font que l'autosimilarité disparaît.

On a coutume de caractériser un objet fractal à partir d'un paramètre numérique généralement noté d appelé *dimension fractale*. Cette notion sera expliquée plus loin.

2.2 Principales caractéristiques

Un objet fractal possède au moins l'une des caractéristiques suivantes :

- il a des détails similaires à des échelles petites ou grandes ;
- il est trop irrégulier pour être décrit efficacement en termes géométriques traditionnels ;
- il est exactement ou statistiquement autosimilaire, c'est-à-dire que le tout est semblable à une de ses parties ;
- sa dimension de Hausdorff est strictement supérieure à sa dimension topologique.

La dimension de Hausdorff (*voir plus loin*) est un moyen de calculer la dimension d'un espace métrique. Il s'agit d'un nombre réel pouvant être infini. La dimension d'une ligne droite, d'un cercle et d'une courbe régulière est de 1.

Quand la fractale est formée de répliques d'elle-même en plus petit, sa dimension fractale peut se calculer comme suit :

$$d = \frac{\ln(n)}{\ln(h)}$$

La notion de **dimension fractale** étant très importante, nous allons voir à présent les dimensions topologique et fractale.

2.3 Dimension topologique

La définition classique, par récurrence, de la dimension topologique d'un espace métrisable E est donnée par récurrence :

Définition 2.3.1 (Dimension topologique)

- 1) l'espace E est de dimension 0 si sa topologie admet une base de parties à la fois ouvertes et fermées, soit encore une base de parties à frontière vide (ou de dimension -1). On dit aussi que E est totalement discontinu ;
- 2) l'espace E est au plus de dimension 1 si sa topologie admet une base d'ouverts à frontière de dimension au plus 0 ;
- \vdots
- n) l'espace E est de dimension au plus n si sa topologie admet une base d'ouverts à frontière de dimension au plus $n - 1$.

Enfin l'espace E non vide est dit de dimension n s'il est de dimension au plus n mais n'est pas de dimension au plus $n - 1$, et de dimension infinie s'il n'existe pas de n tel qu'il soit de dimension au plus n .



À chaque itération la courbe augmente d'un facteur de $4/3$. Si on répète cette procédure infiniment la longueur de cette courbe tendra vers l'infini. L'air sous la courbe est donnée par la série :

$$1 + (4/9) + (4/9)^2 + (4/9)^3 + \dots$$

qui converge vers $9/5$ si on suppose que l'air sous la première courbe est de 1. Ce résultat bien que peu intuitif n'est pas étrange pour une fractale.

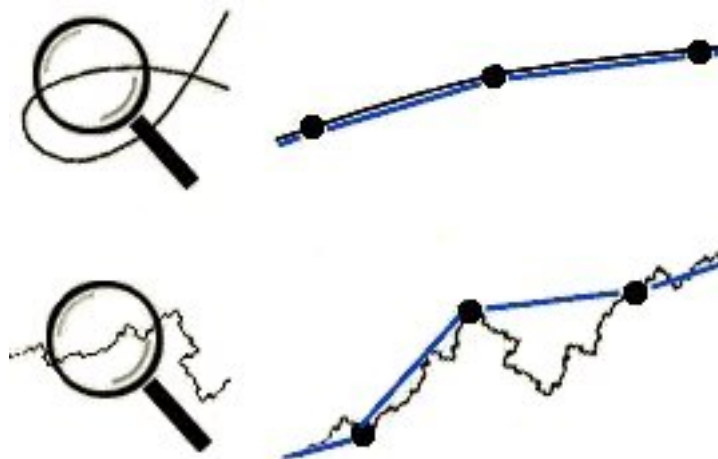
2.4 Dimension d'un objet fractal

La dimension introduite ci-dessus, à valeur entière, est une notion topologique alors que la notion de dimension de Hausdorff, à valeur réelle, est métrique, et dépend fortement de la distance utilisée.

On peut trouver différentes définitions équivalentes de cette notion. Le raisonnement le plus simple pour un non-mathématicien consiste à partir d'un problème apparemment simple : quelle est la longueur d'une ligne

fractale? Par exemple, très concrètement, quelle est la longueur des côtes de Bretagne?

Le résultat surprenant est que ça dépend avec quelle règle on fait la mesure. Plus elle est petite, plus la longueur trouvée est grande.



Plus on zoom plus on construit une approximation polygonale de la courbe.

De qu'elle manière donc mesurer un objet de façon générale (corde, terrain, piscine, etc.)?

Cela dépend de la dimension de l'objet.

En mathématiques, les limites nous permettent de mesurer la dimension des objets :

- pour une courbe (par exemple les côtes de Bretagne) :

$$l(C) = \lim_{u \rightarrow 0} N(u) * u$$

- pour un objet en deux dimensions (par exemple un terrain de foot) :

$$A(O) = \lim_{u \rightarrow 0} N(u) * u^2$$

- pour un objet en trois dimensions (par exemple une piscine) :

$$V(O) = \lim_{u \rightarrow 0} N(u) * u^3$$

Nous voyons que de manière plus générale, on a :

$$m(O) = \lim_{u \rightarrow 0} N(u) * u^d, d \in \{1, 2, 3\}$$

d est donc la dimension de Hausdorff-Besicovitch. Dans notre simple formule d peut valoir 1, 2 ou 3. Cependant pour les fractales les choses se compliquent. En effet, d n'est pas un forcément un entier.

d caractérise la manière selon laquelle une fractale évolue dans l'espace où elle est dessinée. Plus d est grand plus l'évolution est "chaotique".

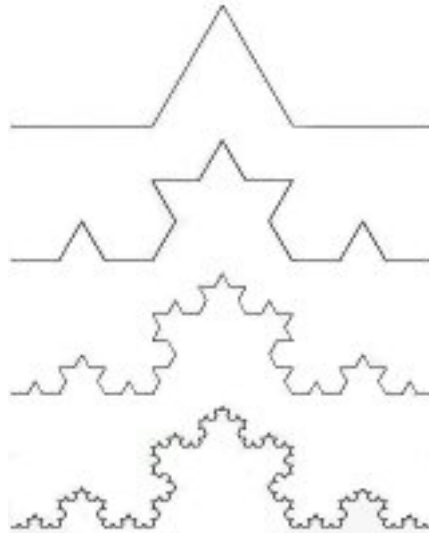
Démonstration

Nous avons la relation : $1 = \lim_{u \rightarrow 0} N(u) * u^d, d \in \mathbb{R}$. Il nous faut alors trouver la valeur de d .

$$\begin{aligned}
 \ln(1) &= \lim_{u \rightarrow 0} (\ln(N(u)) * u^d) \\
 0 &= \lim_{u \rightarrow 0} (\ln(N(u)) + \ln(u^d)) \\
 0 &= \lim_{u \rightarrow 0} \ln(N(u)) + d * \ln(u) \\
 0 &= \ln(N(u)) + d * \ln(u) \\
 d * \ln(u) &= -\ln(N(u)) \\
 d &= -\frac{\ln(N(u))}{\ln(u)} \\
 d &= \frac{\ln(\frac{1}{N(u)})}{\ln(u)}
 \end{aligned}$$

□

2.4.1 Exemple avec la courbe de Koch



n	u	$N(u)$	$u * N(u)$	u^2	$N(u) * u^2$
0	1	1	1	1	1
1	$1 \div 3$	4	$4 \div 3$	$1/9$	$4 \div 9$
2	$1 \div 9$	16	$16 \div 9$	$1 \div 81$	$16 \div 81$
...					
n	$\frac{1}{3^n}$	4^n	$\frac{4^n}{3}$	$\frac{1}{3^{2n}}$	$\frac{4^n}{3^{2n}}$

Nous avons ainsi :

$$l(o_n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$A(o_n) = \left(\frac{4}{9}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\begin{aligned} m(o_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n * \left(\frac{1}{3^n}\right)^d \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3^d}\right)^n, d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Pour la courbe de Koch la dimension de Hausdorff-Besicovitch est :

$$d = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} = 1,26$$

En effet le quart de l'objet est identique à l'objet initial, à une dilatation d'un facteur 3.

Démonstration

On a $m(o_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n * \left(\frac{1}{3^n}\right)^d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3^d}\right)^n, d \in \mathbb{R}$.

On veut $\frac{4}{3^d} = 1$:

$$\begin{aligned} 4 &= 3^d \\ \ln(4) &= d * \ln(3) \\ d &= \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \end{aligned}$$

□

Notons que la propriété d'une partie d'un objet d'être exactement semblable à l'objet lui-même, à une dilatation près, s'appelle la *similitude interne*. Mathématiquement on dit qu'on dilate par *Homothétie* d'un facteur 3.

Définition 2.4.1 (Homothétie) Une homothétie est une transformation géométrique d'un espace affine dans lui-même, fixant un point O appelé centre de l'homothétie. Une homothétie se définit donc par son centre (un point de l'espace affine) et son rapport (un scalaire non nul). Les homothéties préservent l'alignement des points et les rapports algébriques. En géométrie euclidienne, elles apparaissent comme des cas particulier des similitudes ; les homothéties préservent les angles et dilatent les distances.

On peut également se demander combien de disques auront nous besoin pour recouvrir la courbe de Koch. Cela dépend évidemment de la taille du disque. Un disque de diamètre 1 suffit à la couvrir entièrement. 4 disques de diamètre $1/3$ suffisent à la couvrir, ou encore 16 disques de diamètres $1/9$, 64 disques de diamètres $1/27$, etc. En général 4^n disques de diamètre $\frac{1}{3^n}$ couvrent la courbe de Koch. La dimension de Hausdorff-Besicovitch est donnée avec la formule :

$$D = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log N(h)}{\log(1/h)}$$

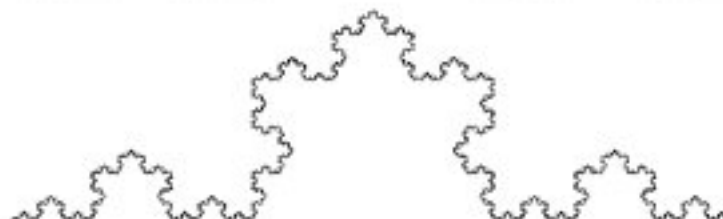
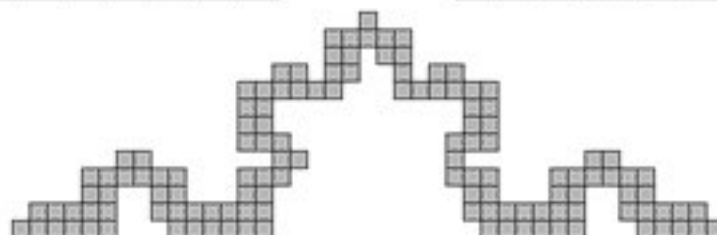
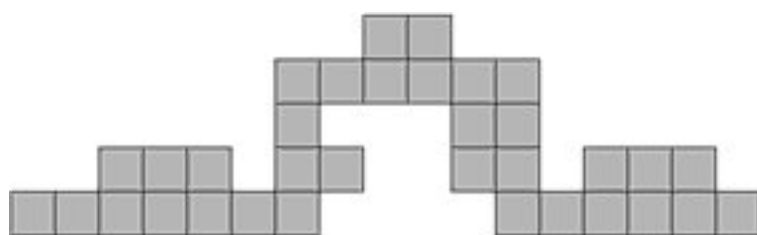
où $N(h)$ est le nombre de disques de taille h .

Donc la dimension de Hausdorff-Besicovitch de la courbe de Koch est la limite de la séquence :

$$\frac{\log 1}{\log 1}, \frac{\log 4}{\log 3}, \frac{\log 16}{\log 9}, \frac{\log 64}{\log 27}, \dots, \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{n \log 4}{n \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.261859507 \dots$$

Le problème maintenant, est de savoir comment interpréter le résultat $1.261859507 \dots$? Ce n'est ni une dimension topologique 1, ni une dimension 2. La courbe de Koch est quelque part entre une ligne et un plan. ça dimension n'est pas un nombre entier. C'est une **fractale**. On peut donc dire qu'une fractale est une entité qui a une dimension de Hausdorff-Besicovitch strictement supérieur à ça dimension topologique.

Cependant la dimension de Hausdorff-Besicovitch peut être un nombre entier. Par exemple la courbe de Peano a une dimension de Hausdorff-Besicovitch égale à 2 et une dimension topologique égale à 1.



Chapitre 3

Les paysages fractales

3.1 Techniques de génération

Dans le cadre de la synthèse d'image, actuellement en plein développement, la modélisation de scènes naturelles et en particulier de paysages représente un challenge particulier en raison de la complexité importante des scènes à synthétiser.

Un paysage est composé d'un ensemble d'objets naturels et artificiels de natures différentes dont la modélisation individuelle est difficile. Parmi ces objets on trouve bien sûr les arbres, mais aussi les nuages et surtout le relief qui les supporte.

Les méthodes imaginées pour la génération de reliefs sont moins variées que celle traitant de la modélisation des arbres (L-system, IFS). Pourtant les domaines d'application de la modélisation de reliefs sont nombreux (simulateurs de vols, animation, images de synthèse, ...) et imposent deux objectifs antinomiques : le réalisme et l'efficacité.

Il existe une très grande diversité des modélisations proposées pour la synthèse d'images de végétaux et de terrains.

Cette partie va exposer les principales techniques de génération de paysages fractales.

3.1.1 Systèmes de fonctions itérées

Une méthode importante de compression et de restitution d'images est celle fondée sur les systèmes de fonctions itérées (*Iterated Function Systems*, IFS). Cette technique totalement étrangère à toute analyse de la structure d'un paysage est purement mathématique.

Un système de fonctions itérées est une théorie mathématique développée par John Hutchinson en 1981 mais presque essentiellement utilisée dans le

cadre de la géométrie fractale. Cette théorie est entièrement fondée sur les invariances par changement d'échelle.

Un IFS peut être la représentation fonctionnelle d'une fractale.

À tout ensemble fini de fonctions affines strictement contractantes (IFS), on associe la transformation W qui à un compact B du plan associe :

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N W_n(B)$$

$\{W_n, 1 \leq n \leq N\}$ est l'ensemble des fonctions affines. L'attracteur de l'IFS est alors l'unique point fixe A de W sur l'espace complet des parties compactes du plan muni de la distance de Hausdorff (théorème du point fixe).

Définition 3.1.1 (Fonction contractante) *On appelle "contractante" une fonction affine f telle que la distance d entre deux points p_1 et p_2 est plus grande que la distance entre $f(p_1)$ et $f(p_2)$.*

Fonctionnement

La structure d'une fractale IFS est donc décrite par un ensemble de fonctions affines (transformations ou *règles*) calculant les transformations appliquées à chaque point par homothétie, translation et rotation. Chaque transformation utilise deux fonctions pour calculer les nouvelles valeurs x_1 et y_1 des coordonnées x et y de chaque point :

$$ax + by + e = x_1$$

$$cx + dy + f = y_1$$

a , b , c et d sont les coefficients des équations. e et f sont les termes constants. Les formes générales des coefficients sont :

- $a = R * \cos(\alpha)$;
- $b = -R' * \sin(\alpha')$;
- $c = R * \sin(\alpha)$;
- $d = R' * \cos(\alpha')$;
- $e = x_1 - x$;
- $f = y_1 - y$.

où :

- R est une réduction sur l'axe des X ;
- α rotation d'angle sur l'axe de X dans le sens trigonométrique ;
- R' est une réduction sur l'axe des Y (en général $R = R'$) ;

- α' rotation d'angle sur l'axe de Y (en général $\alpha = \alpha'$);
- e est une translation sur l'axe des X ;
- f est une translation sur l'axe des Y .

Une probabilité comprise entre 0 et 1 est associée à chaque transformation (le total de toutes les probabilités devant être 1).

Ces transformations se réduisent à des combinaisons de :

- rotations;
- aplatissements selon l'axe horizontal ou vertical. On peut avoir le même rapport d'aplatissement sur les deux axes, auquel cas on parle d'homothétie, mais ce n'est pas obligatoire;
- cisaillements verticaux ou horizontaux, transformant un rectangle en parallélogramme par glissement d'un côté sur lui-même.

On exige seulement que la transformation soit une contraction, c'est-à-dire que la distance entre deux points diminue (du moins, n'augmente pas) au cours de la transformation.

Les IFS sont caractérisées par la très forte amplification des données qui contrôlent la forme d'une image. En effet, $6 * N$ réels définissent les N transformations affines en deux dimensions.

Formule générale

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \cos(\theta) & -r_2 \sin(\psi) \\ r_1 \sin(\theta) & r_2 \cos(\psi) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

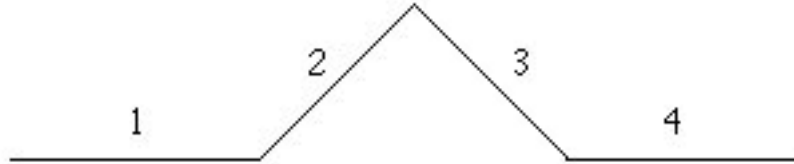
Algorithme

```

Definir la position initiale Z au hasard
Allumer pixel en position Z
Pour i de 1 a n
  Choisir au hasard une fonction affine f
  Z ← f(Z)
Allumer pixel en position Z
Fin pour

```

Courbe de Koch



- pièce 1 : réduction d'un tiers ;
- pièce 2 : réduction d'un tiers, rotation de 60° , puis translation d'un tiers sur l'axe des X ;
- pièce 3 : réduction d'un tiers, rotation de -60° , puis translation d'un demi sur l'axe des X et une translation de 0.287 sur l'axe des Y ;
- pièce 4 : réduction d'un tiers, suivie d'une translation de deux tiers sur l'axe des X .

Les probabilités (poids) sont calculées de la manière :

$$Det\ Regle(i) = ABS(a * d - b * c)$$

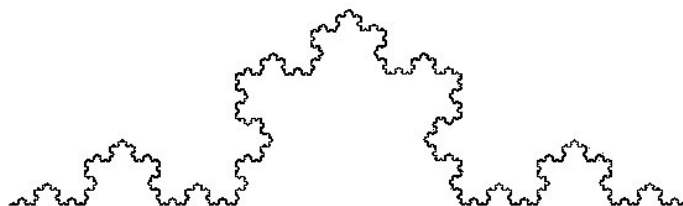
$$P(Reglei) = Det \frac{(Reglei)}{(\sum Dets)}$$

Souvent ces probabilités sont calculées par le programme avant l'exécution.

a	b	c	d	e	f	p
$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1/4
$\frac{1}{3}\cos(60)$	$-\frac{1}{3}\sin(60)$	$\frac{1}{3}\sin(60)$	$\frac{1}{3}\cos(60)$	$\frac{1}{3}$	0	1/4
$\frac{1}{3}\cos(-60)$	$-\frac{1}{3}\sin(-60)$	$\frac{1}{3}\sin(-60)$	$\frac{1}{3}\cos(-60)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\sin(60)$	1/4
$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1/4

soit,

a	b	c	d	e	f	p
0.333	0	0	0.333	0	0	0.25
0.167	-0.287	0.287	0.167	0.333	0	0.25
0.167	0.287	-0.287	0.167	0.5	0.287	0.25
0.333	0	0	0.333	0.667	0	0.25



Comme nous avons quatres similitudes de rapport $\frac{1}{3}$, $d = 2 * \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = 1,262$

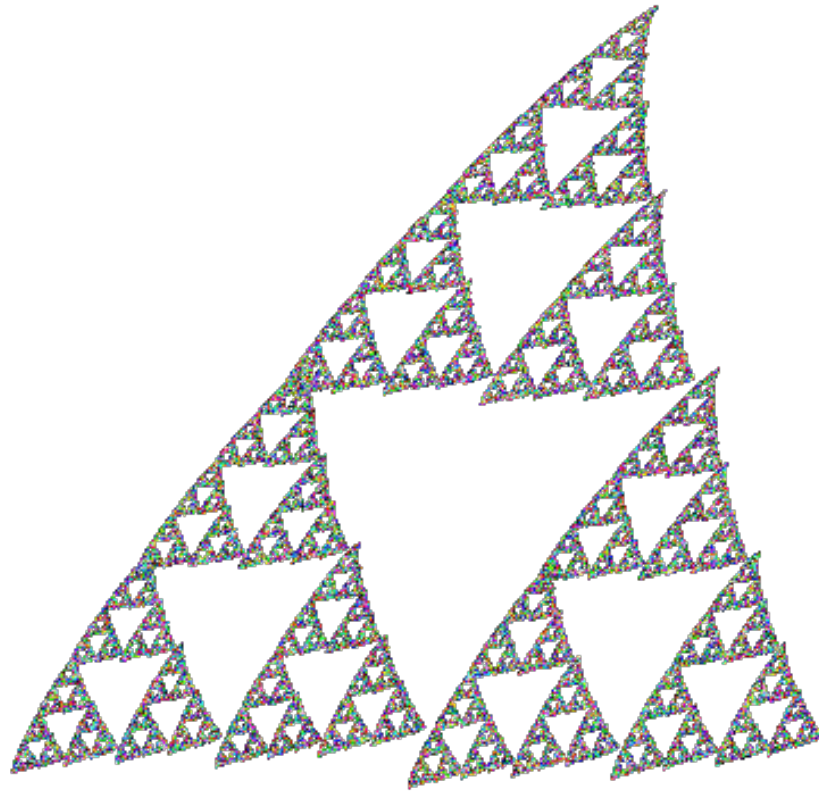
Triangle de Sierpinski

Ici nous avons trois homothéties de rapport $\frac{1}{2}$ de centres les sommets d'un triangle équilatéral.

$$d = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} = 1,585$$

a	b	c	d	e	f	p
0.5	0	0	0.5	0	0	0.333
0.5	0	0	0.5	1	0	0.333
0.5	0	0	0.5	0.5	0.8660254	0.334

Le terme 0.8660254 est le sinus de 60° (triangle équilatéral). La dernière probabilité a été arrondie à 0.334 afin que le total soit égal à 1.



Généré avec le programme ifsFreestyle : <http://ifs-tools.sourceforge.net/>

Ce programme écrit en Java permet de générer des fractales à partir de leur définitions et de dessiner à la souris des fractales afin d'obtenir les coefficients correspondants.

Fougère de Barnsley

Cette fractale a été étudiée par Barnsley en 1988.



Nous avons quatre transformations affines :

a	b	c	d	e	f	p
0	0	0	0.16	0	0	0.01
0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

À titre d'illustration, voir le petit programme ocaml : `fractalIFS.ml` écrit en DEUG.

3.1.2 Technique à base de plaquage de texture

Il s'agit là d'une ancienne technique non fractale. Nous allons donc brièvement l'expliquer.

Le plaquage (ou mappage) de texture est une technique visant à dessiner un objet de manière à ce que les surfaces apparaissant sur cet objet soient revêtues d'une image.

Gardner [Gar84] modélise un terrain et plus généralement un paysage composé (relief, arbres, nuages) par un ensemble de surfaces quadriques 3D. Dans la pratique Gardner utilise surtout des hyperboloïdes et des ellipsoïdes.

Définition 3.1.2 (Surface quadratique) *Une surface quadratique est n'importe quelle surface de l'espace euclidien usuel de dimension 3 représentée par une équation de deuxième ordre via des variables spatiales (coordonnées).*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

avec des réels A, B, C, D, E, F non tous nuls.

Formule d'une ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Formule d'une hyperboloïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

L'utilisation d'une texture mathématique a pour buts :

- l'obtention d'un rendu réaliste (le plaquage de texture est nécessaire pour le terrain et impératif pour les nuages et les arbres) ;
- la réalisation de gros plans ;
- la réalisation d'une animation.

L'inconvénient principal de cette méthode est qu'elle n'inclue pas un réel mécanisme de génération automatique de relief.

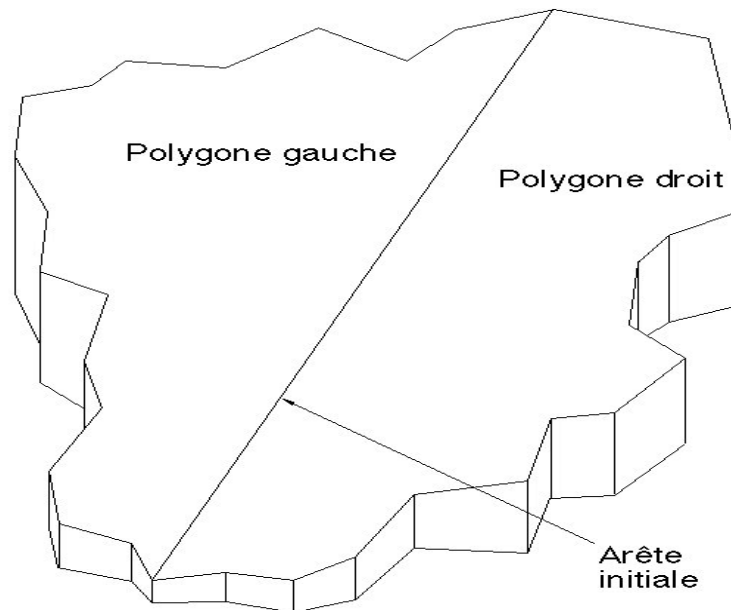
3.1.3 Techniques basées sur un modèle d'érosion

La démarche qui consiste à générer un relief par simulation de l'érosion (modèle dynamique) ou par utilisation de lois rendant compte des conséquences de l'érosion sur un bassin de drainage (modèle statique) est une technique alternative de modélisation de terrain.

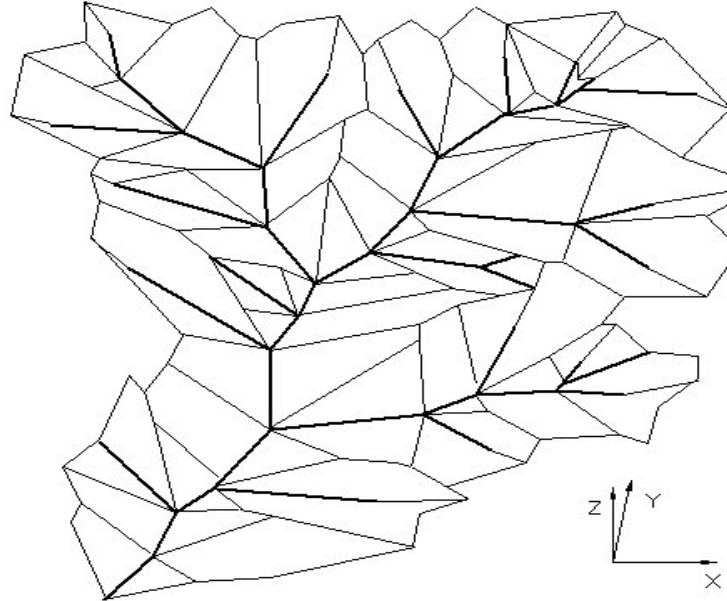
Méthode statique

La description de bassins fluviaux (fleuve et bassin de drainage) est fondée sur des modèles empiriques d'écoulement utilisés en géomorphologie mettant en œuvre un arbre binaire recouvrant une carte modélisant le réseau hydrographique et le bassin de drainage associé. Cet arbre est généré par ajouts récursifs d'affluents à partir d'une arête racine unique concurrentement à l'ajout de facettes à la carte sous-tendue.

Relief initial :



Après ajout d'affluents :



L'arête racine est initialement placée à l'intérieur d'un système de drainage défini par l'arête initiale et les deux polygones à droite et à gauche de cette arête, ces trois composants étant positionnés dans \mathbb{R}^3 .

À chaque création de nouveaux nœuds on ajoute un nœud de jonction sur l'ancien segment et un nœud à l'extrémité du segment nouvellement créé.

Cette méthode matérialise un modèle de génération statique, c'est-à-dire qu'il n'y a pas simulation de l'érosion par déplacement de matière, mais génération d'un relief à partir des conséquences d'un phénomène d'érosion présentées sous forme de lois topologiques et géométriques.

Modèles dynamiques

Les modèles dynamiques de génération de reliefs modélisent en revanche l'évolution d'un relief au moyen de processus mettant en œuvre des déplacements de matière.

On part généralement d'un maillage régulier initial carré ou hexagonal dont chaque sommet est affecté d'une altitude constante bruitée fractalement. On simule l'évolution dans le temps de ce relief en faisant subir à chaque itération temporelle à chaque point du maillage une érosion exprimée par une baisse de son altitude (dans certains cas particulier de points situés dans une cuvette, il peut y avoir accroissement de l'altitude par sédimentation). Cette

variation d'altitude est calculée à partir d'un certain nombre de lois simulant un déplacement de matière traduisant l'action de l'eau :

- loi gravitaire ;
- loi mécanique ;
- loi chimique ;
- loi sédimentaire.

Ces quatre lois sont fonctions des précipitations et de paramètres géologiques attribués aux nœuds :

- un coefficient Kd de dureté de la roche ;
- un coefficient Kf d'infiltration ;
- un coefficient Kv de végétation ;
- un coefficient Kc de dissolution chimique ;
- un rapport entre les sédiments déposés et les sédiments restant en suspension.

Le calcul de l'écoulement de l'eau est effectué de manière simplifiée en considérant que les eaux de ruissellement provenant d'un sommet du maillage quelconque se dirigent toujours vers le sommet d'altitude minimum qui lui est adjacent. En fonction de ces caractéristiques l'érosion est différente suivant la position des nœuds du maillage. Cette méthode a cependant le désavantage de générer des vallées parfois trop symétriques. On peut résoudre ce problème par une méthode fractale en effectuant une modélisation en deux étapes consécutives :

- une génération fractale adaptée à la génération de reliefs ;
- une phase d'érosion du relief fractal obtenu.

3.1.4 Déplacement du point médian

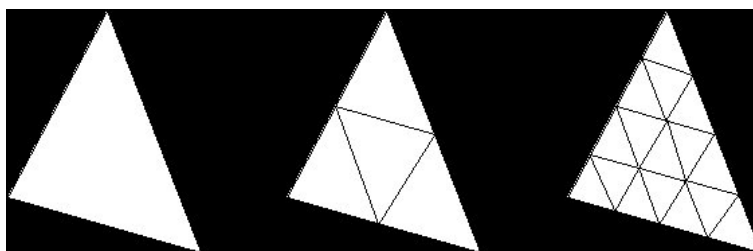
Il date des années 1920 et a été introduit par N. Wiener.

Les fractales aléatoires sont les plus utilisées dans la pratique, et peuvent servir à décrire de nombreux objets extrêmement irréguliers du monde réel. Les exemples incluent les nuages, les montagnes, les turbulences de liquide, les lignes des côtes et les arbres.

Fonctionnement

Une surface plane est découpée en plusieurs parties par un maillage et un déplacement vertical aléatoire est appliqué au centre de chaque maille. Chaque partie est à son tour subdivisée en surfaces plus petites par le même mécanisme et on applique au centre de chacune d'elles un nouveau déplacement vertical aléatoire. On recommence un nombre suffisant de fois pour avoir des détails de taille assez petite afin que l'image soit réaliste.

Une étape de fractalisation d'un triangle :



Cette méthode a l'avantage d'être simple à comprendre mais les reliefs peuvent présenter des artefacts sous forme de discontinuités peu vraisemblables. Une méthode plus élaborée repose sur l'utilisation d'une fonction décrivant un mouvement *brownien* fractionnaire.

Mouvement Brownien

Il a été découvert par le botaniste Robert Brown (1773-1858) lorsqu'il a étudié le mouvement aléatoire des particules dans un liquide au repos. C'est une fonction dont la variance entre l'instant t_1 et t_2 est proportionnelle à la différence entre t_1 et t_2 .

Nous avons donc :

$$\langle |V_H(t_1) - V_H(t_2)|^2 \rangle = \alpha |t_2 - t_1|^{2H}$$

où :

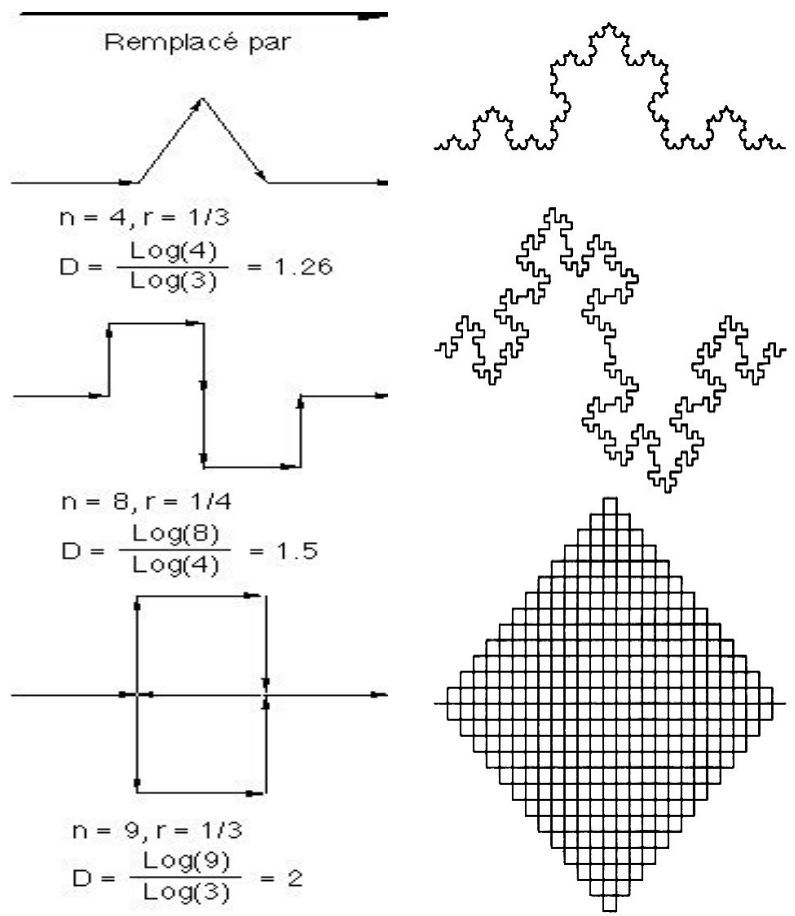
- α est un scalaire ;
- V_H est une fonction de x définie par :
 - $V_H(0) = 0$;
 - $\langle |V_H(t+1) - V_H(t)|^2 \rangle = \alpha^2$

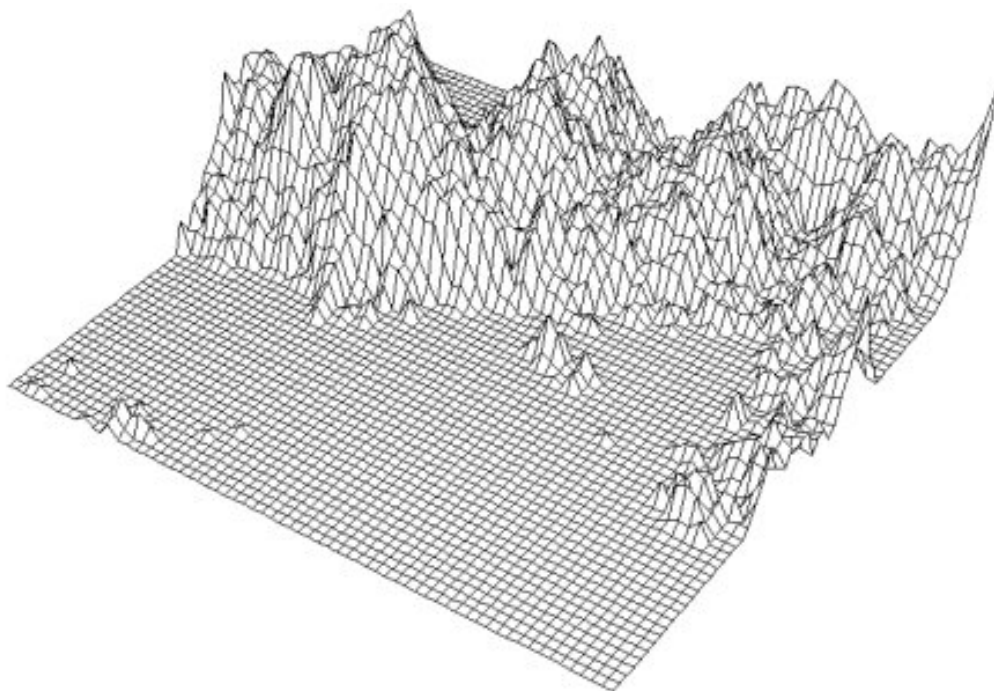
Une valeur de H égale à $0,5$ quantifie un mouvement Brownien normal. L'une des propriétés de ces processus temporels est l'autoaffinité, c'est-à-dire que deux morceaux quelconques de la courbe représentative du processus se ressembleront, mais surtout, si l'on effectue une mise à l'échelle d'un facteur r sur le temps et d'un facteur r^H sur $V_H(t)$, la courbe garde toujours le même aspect.

L'extension multidimensionnelle des fBm permet de modéliser un large éventail de phénomènes naturels dont, en particulier, les reliefs. Le paramètre temps t est alors transformé en un couple (x, y) indiquant une position dans le plan d'un point P , $V_H(x, y)$ donne l'altitude du point P .

Nous avons vu que les fractales stochastiques, permettent de générer des dessins non réguliers. Avec d voisin de $2,2$ pour la génération de montagnes (surfaces), plus d croît plus la ligne ou la surface devient chaotique et irréaliste.

On obtient de bons résultats avec d voisin de $1,2$ pour générer des rivages océaniques (lignes).





De très nombreux travaux ont été effectués avec pour but une implantation efficace des fractales stochastiques. En effet, la programmation exacte des lois mathématiques mises en œuvre requiert une quantité de calcul très importante. Ces implémentations sont essentiellement des approximations du mouvement Brownien fractionnaire soit par des techniques spatiales (subdivision récursive), soit par des techniques spectrales (par filtrage de Fourier).

Évolution possible

Une alternative à cette méthode serait d'utiliser par exemple de carrés en lieu et place de triangles. De plus le point du déplacement vertical pourrait être choisi aléatoirement afin d'obtenir un relief moins homogène, plus réaliste. Cette méthode permet de générer des reliefs d'une excellente qualité.

3.2 Mesure de dimension fractale

3.2.1 Calcul du périmètre et de l'aire du flocon de von Koch

Soit c_n le nombre de cotés du flocon à l'étape n de sa construction, on a :

$$c_{n+1} = 4c_n = c_0 * 4^{n+1} = 3 * 4^{n+1}$$

Soit l_n la longueur d'un coté du flocon à l'étape n , on a :

$$l_{n+1} = \frac{l_n}{3} = \frac{l_0 * 1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^{n+1}}$$

si 1 est la longueur des cotés initiaux.

On a donc p_n périmètre du triangle tel que :

$$p_n = c_n * l_n = 3 * \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Donc le périmètre du flocon est égal à $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$

c_{n-1} est le nombre de nouveaux triangles créés à l'étape n .

Soit a_n l'aire du flocon à l'étape n , on a :

$$a_n = a_{n-1} + c_{n-1} * l_n * \frac{\sqrt{3}}{4} = a_{n-1} + 3 * \left(\frac{4}{9}\right)^n * \frac{\sqrt{3}}{16}$$

et donc :

$$a_n = a_0 + \frac{3 * \sqrt{3}}{16} * \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3 * \sqrt{3}}{16} * \frac{4}{9} * \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}}$$

d'où l'air du flocon :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3 * \sqrt{3}}{16} * \frac{4}{9} * \frac{9}{5} = \frac{2 * \sqrt{3}}{5}$$

On trouve donc une air bien finie alors que la limite du périmètre tend vers l'infini.

3.2.2 Calcul de la dimension fractale d'un relief

Nous allons maintenant à titre d'exemple voir comment calculer la dimension fractal d'un objet, le chou de Romanesco.



Chacune des branches du chou Romanesco (ou sous branches agrandies plusieurs fois) peut être confondue avec le chou lui-même ou avec la branche principale d'origine. On n'as vu que ce chou est parfaitement autosimilaire (cf *généralités*).

Si on coupe le chou romanesco de haut en bas, on note une organisation en branches principales qui se séparent en branches plus petites. La première division se produit sur la branche principale d'origine et peut donner de 10 à 15 branches secondaires. Cette division se renouvelle de la même manière à chaque étage avec une régularité impressionnante. A vue d'œil on peut remarquer entre 10 et 15 étages de divisions entre la branche d'origine et la surface du chou romanesco.

On sait que la dimension fractale d'un chou est entre 2 et 3. Pour le montrer supposons qu'après une itération nous avons le *maximum*, c'est-à-dire 15 branches obtenues. Sachant qu'au début il y a une seule branche, la principale. Prenons aussi expérimentalement un facteur de réduction de 3, qui semble raisonnable.

La dimension fractale du chou est alors :

$$d = \frac{\ln\left(\frac{n}{n_i}\right)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}$$

n est donc le nombre de branches obtenues après l'itération, n_i le nombre de branches initiales et r la réduction.

donc :

$$d = \frac{\ln\left(\frac{15}{1}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\ln(15)}{\ln(3)} = 2,46$$

La dimension fractale de ce chou est donc de 2,46. On avait vu qu'une dimension fractale aux alentours de 2,2 était idéale pour générer des paysages. Ce résultat paraît donc probant étant donné qu'un paysage est généralement moins *chaotique* que la surface d'un chou de Romanesco.

Chapitre 4

Conclusion

Les fractales sont donc des objets mathématiques qui résultent de représentations graphiques de suites complexes. Leur découverte relativement ancienne a surtout été exploitée depuis l'apparition des ordinateurs modernes qui permettent de représenter les itérations de suites complexes rapidement. En effet, il ne serait pas envisageable de les représenter précisément sans outil informatique. Seule la nature a réussi à les représenter. Les exemples les plus connus sont les choux et les fougères, mais il en existent de nombreux autres, comme la côte bretonne, les poumons, ou encore la répartition des galaxies.

Citons quelques importantes qualités des fractales :

- réalisme remarquable ;
- très importante amplification des données (un très petit nombre de paramètres suffit à décrire un nuage ou une montagne fractale simple) ;
- niveau de détail aussi fin que voulu.

Nous avons vu que de nombreuses techniques de générations de fractales ont été mises au point. Cependant les fractales stochastiques constituent un excellent moyen de représentation d'images réalistes d'objets naturels. La méthode du *point médian* permet en effet de générer des reliefs très réalistes.

Le caractère fractal des images obtenues permet d'obtenir des agrandissements à toute échelle tout en gardant le même code en mémoire et la même précision de rendu.

Cependant les techniques de fractales pour la génération de paysages les plus abouties demandent encore une puissance de calcul considérable.

Bibliographie

- [Add97] Paul S Addison. *Fractals And Chaos*. Institute of Physics Publishing, London, 1997.
- [Gar84] Geoffrey Y. Gardner. Simulation of Natural Scenes Using Textured Quadric Surfaces. 18(3) :11–20, July 1984.
- [Lin90] Aristid LindenMayer. *The Alogirthmic Beauty of Plants*. Springer-Verlag, 1990.
- [Sap00] Bernard Sapoval. *Universalités et fractales*. Flammarion, 2000.