Les Paysages Fractals

Cédric BONHOMME

Université Paul-Verlaine de Metz

25 mai 2008

Avec : Jean-Charles BETTINGER
Encadré par : M. Dominique MICHEL

Plan

1. Généralités
   - Caractéristiques des fractales
   - Dimension topologique
   - Dimension de Hausdorff-Besicovitch
2. Paysages fractals
   - Techniques de générations
     - Iterated Fonction System
     - Plaquage de texture
     - Techniques basées sur un modèle d'érosion
     - Déplacement du point médian
   - Mesure de dimension fractale
     - Calcul du périmètre et de l'aire du flocon de Von Koch
     - Calcul de la dimension fractale d'un relief
3. Conclusion

Généralités

Caractéristiques

- détails similaires à des échelles différentes ;
- trop irrégulier pour être décrit efficacement en termes géométriques traditionnels ;
- exactement ou statistiquement autosimilaire, c'est-à-dire que le tout est semblable à une de ses parties ;
- dimension de Hausdorff-Besicovitch strictement supérieure à sa dimension topologique.

Généralités

Trois grandes catégories de fractales

- systèmes de fonctions itérées. Par exemple les IFS (*Iterated Fonction System*) ;
- les fractales *statistiques*, définies par une fonction de récurrence. Par exemple la fractale de Mandelbrot ;
- les fractales *stochastiques*, aléatoires.

Généralités - Notions importantes

Autosimilirаté

Autosimilarité

Un objet autosimilaire est un objet qui conserve sa forme, quelle que soit l'échelle à laquelle on l'observe.

Généralités - Notions importantes
Dimension topologique

- dimension topologique : 1 ;
- à chaque itération la courbe augmente d'un facteur de $4/3$;
- $\Rightarrow A = 1 + (4/9) + (4/9)^2 + (4/9)^3 + \ldots$

Généralités - Notions importantes

Dimension de Hausdorff-Besicovitch

- limites pour des objets *classiques* :
  - $l(C) = \lim_{u \to 0} N(u) * u$;
  - $A(O) = \lim_{u \to 0} N(u) * u^2$;
  - $V(O) = \lim_{u \to 0} N(u) * u^3$;
  - en général : $m(O) = \lim_{u \to 0} N(u) * u^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$;
  - où d est un entier !

Généralités - Notions importantes

Dimension de Hausdorff-Besicovitch

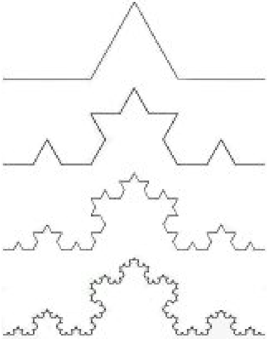
- pour des objets *fractals* :
  - d est un réel !
  - d caractérise le *degré de fractalité* ;
  - d est appelé la dimension de Hausdorff-Besicovitch ;
  - comment la calculer ?
  - $d = \frac{log(N)}{log(1/r)}$ où :
    - r est le rapport d'homothétie ;
    - N est le nombre d'*éléments* crées par l'opération homothétie.

Généralités - Notions importantes

Dimension de Hausdorff-Besicovitch

Exemple avec la courbe de Von Koch

n	u	$N(u)$	$u * N(u)$	u^2	$N(u) * u^2$
0	1	1	1	1	1
1	$\frac{1}{3}$	4	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	16	$\frac{16}{9}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{16}{81}$
$\vdots$					
n	$\frac{1}{3^n}$	4^n	$\frac{4}{3}^n$	$\frac{1}{3^{2n}}$	$\frac{4^n}{3^{2n}}$



Généralités - Notions importantes

Dimension de Hausdorff-Besicovitch

- $l(o_n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- $A(o_n) = \left(\frac{4}{9}\right)^n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
- $m(o_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} 4^n * \left(\frac{1}{3^n}\right)^d = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{3^d}\right)^n, d \in \mathbb{R}$

$$d = \frac{ln(4)}{ln(3)} = 1,26$$

Le quart de l'objet est identique à l'objet initial, à une dilatation d'un facteur 3.

Généralités - Notions importantes

Dimension de Hausdorff-Besicovitch

Démonstration

On a : $m(o_n) = \lim_{n \to +\infty} 4^n * \left(\frac{1}{3^n}\right)^d = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3^d}\right)^n, d \in \mathbb{R}$.

On veut $\frac{4}{3^d} = 1$ *:*

$$\begin{aligned} 4 &= 3^d \\ ln(4) &= d * ln(3) \\ d &= \frac{ln(4)}{ln(3)} \end{aligned}$$

$\square$

Généralités - Notions importantes

Dimension de Hausdorff-Besicovitch

Démonstration

Nous avons la relation : $1 = \lim_{u \to 0} N(u) * u^d, d \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
ln(1) &= \lim_{u \to 0} (ln(N(u)) * u^d) \\
0 &= \lim_{u \to 0} (ln(N(u)) + ln(u^d)) \\
0 &= \lim_{u \to 0} ln(N(u)) + d * ln(u) \\
\Rightarrow 0 &= ln(N(u)) + d * ln(u) \\
d * ln(u) &= -ln(N(u)) \\
d &= -\frac{N(u)}{ln(u)} \\
d &= \frac{ln(\frac{1}{N(u)})}{ln(u)}
\end{aligned}
$$

$\square$

Généralités - Notions importantes

Dimension de Hausdorff-Besicovitch

Finalement :

- dimension topologique : dimension *traditionelle* à valeur entière ;
- dimension fractale : à valeur entière, métrique.

1. Généralités
   - Caractéristiques des fractales
   - Dimension topologique
   - Dimension de Hausdorff-Besicovitch
2. Paysages fractals
   - Techniques de générations
     - Iterated Fonction System
     - Plaquage de texture
     - Techniques basées sur un modèle d'érosion
     - Déplacement du point médian
   - Mesure de dimension fractale
     - Calcul du périmètre et de l'aire du flocon de Von Koch
     - Calcul de la dimension fractale d'un relief
3. Conclusion

Iterated Fonction System (IFS)

Iterated Fonction System (IFS)

- utilisé pour représenter les végétaux et nuages ;
- pas utile que pour les fractales ;
- théorie dévéloppée en 1981 par John Hutchinson ;
- technique purement mathématique ;
- une IFS est un ensemble de n fonctions contractantes.

Fonction contractante

On appelle "contractante" une fonction affine f telle que la distance d entre deux points $p1$ et $p2$ est plus grande que la distance entre $f(p1)$ et $f(p2)$.

Iterated Fonction System (IFS)

Définition mathématique de la transformation :

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} W_n(B)$$

- $\{W_n, 1 \leq n \leq N\}$ est l'ensemble des fonctions affines ;
- des probabilités sont associées aux fonctions ;
- avec le théorème du point fixe on a l'existence et l'unicité de l'attracteur.
  $\Rightarrow$ cela en fait des fractales, aléatoires.

Iterated Fonction System (IFS)

- les fonctions affines définissent donc les transformations (homothétie, translation, rotation) ;
- de manière itérative les fonctions calculent les nouveaux coordonnées du point précédent ;
- les fonctions sont définies de cette manière :

$$ax + by + e = x_1$$

$$cx + dy + f = y_1$$

$$W_i(X) = W_i(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Iterated Fonction System (IFS)

- $a = R * cos(\alpha)$;
- $b = -R' * sin(\alpha')$;
- $c = R * sin(\alpha)$;
- $d = R' * cos(\alpha')$;
- $e = x_1 - x$;
- $f = y_1 - y$.

a, *b*, *c* et *d* sont les cœfficients des équations.
e et *f* sont des termes constants. Ils constituent en fait le vecteur de déplacement.

Iterated Fonction System (IFS)

où :

- R est une réduction sur l'axe des X ;
- α rotation d'angle sur l'axe de X dans le sens trigonométrique ;
- R' est une réduction sur l'axe des Y (en général $R = R'$) ;
- α' rotation d'angle sur l'axe de Y (en général $\alpha = \alpha'$) ;
- e est une translation sur l'axe des X ;
- f est une translation sur l'axe des Y.

Iterated Fonction System (IFS)

- les cœfficients a, b, c, d, e et f avec une probabilité p définissent la fractale IFS.
- la somme des probabilités doit être égale à 1 ;
- on dit que la probabilité p est la fréquence d'appel d'une transformation.

Iterated Fonction System (IFS)

Algorithme général

```
Definir la position initiale Z au hasard
Allumer pixel en position Z
Pour i de 1 a n
    Choisir au hasard une fonction affine f
    Z <- f(Z)
    Allumer pixel en position Z
Fin pour
```

Iterated Fonction System (IFS)

Triangle de Sierpinski

a	b	c	d	e	f	p
0.5	0	0	0.5	0	0	0.333
0.5	0	0	0.5	1	0	0.333
0.5	0	0	0.5	0.5	0.8660254	0.334

- trois homothéties de rapport $\frac{1}{2}$;
- le terme 0.8660254 est le sinus de 60 ° ;
- la dernière probabilité a été arrondie à 0.334 afin que le total soit égal à 1.

Iterated Fonction System (IFS)

Fougère de Barnsley

a	b	c	d	e	f	p
0	0	0	0.16	0	0	0.01
0.85	0.04	−0.04	0.85	0	1.6	0.85
0.2	−0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
−0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

- la première ligne représente le bas de la tige avec une probabilité de 1% ;
- la deuxième représente le reste de la tige avec une probabilité de 85% ;
- les deux dernières les feuilles.

Plaquage de texture

- puissante méthode ;
- mais non fractale :
  - $\Rightarrow$ pas un réel mécanisme de génération stochastique ou même statistique.
- paysage dessiné *via* des objets mathématiques statiques ;
- surface des objets revêtues d'images ;
- Gardner [Gar84] modélise un paysage composé (relief, arbres, nuages) par un ensemble de surfaces quadriques $3D$.

Techniques basées sur un modèle d'érosion

- on simule l'érosion du relief ;
- utilisation de lois physiques rendant compte les conséquences du changement du relief ;
- deux méthodes :
  - statique ;
  - dynamique.

Techniques basées sur un modèle d'érosion

Méthode statique

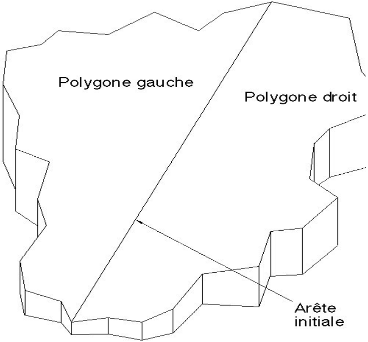
Principe :

- on part d'une arête initiale ;
- puis on génère un arbre binaire par ajouts récursifs d'arêtes (affluents) ;
- pour chaque nouveau nœud :
  - ajout d'un nœud de jonction avec le segment *père* ;
  - ajout d'un nœud à l'extrémité du nouveau segment.

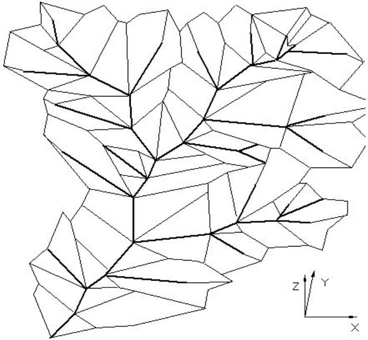
Techniques basées sur un modèle d'érosion

Méthode statique - Exemple

Au départ :



Après itérations :



Techniques basées sur un modèle d'érosion

Méthode dynamique

Principe :

- ici les processus mettent en œuvre des déplacements de matière ;
- à chaque étape les points du maillage subissent une baisse d'altitude ;
- certain nombre de lois prises en comptes :
  - loi gravitaire ;
  - loi mécanique ;
  - loi chimique ;
  - loi sédimentaire.

Déplacement du point médian

Principe :

- une surface plane est découpée en plusieurs parties ;
- un déplacement vertical aléatoire est appliqué au centre de chaque parties ;
- on réitère le processus sur chaque nouvelles parties crées.

Avantage :

- méthode simple à comprendre.

Inconvénient :

- les reliefs peuvent présenter des artéfacts sous forme de discontinuités peu vraisemblables.

Solution :

- utilisation d'une fonction décrivant un mouvement *brownien* fractionnaire.

Déplacement du point médian

Mouvement brownien

Mouvement brownien

Fonction dont la variance entre l'instant t_1 et t_2 est proportionnelle à la différence entre t_1 et t_2.
Mathématiquement :

$$\langle |V_H(t_1) - V_H(t_2)|^2 \rangle = \alpha |t_2 - t_1|^{2H}$$

Déplacement du point médian

Mouvement brownien

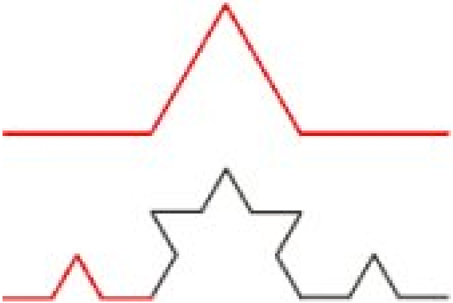
dans la formule précédente :

- α le cœfficient de proportionnalité est un scalaire ;
- V_H est une fonction de x définie par :
  - $V_H(0) = 0$;
  - $\langle |V_H(t+1) - V_H(t)|^2 \rangle = \alpha^2$.

Mesure de dimension fractale

Le flocon de Von Koch ...

Dimension fractale : $d = \frac{ln(4)}{ln(3)} = 1,26$ (rappel)



Mesure de dimension fractale

Périmètre du flocon de Von Koch

soit :

- $c_{n+1} = 4c_n = c_0 * 4^{n+1} = 3 * 4^{n+1}$ le nombre de côté à l'étape n ;
- $l_{n+1} = \frac{l_n}{3} = \frac{l_0 * 1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^{n+1}}$ la longueur d'un coté du flocon à l'étape $n+1$

donc :

- $p_n = c_n * l_n = 3 * (\frac{4}{3})^n$ est le périmètre à l'étape n ;
  - donc : $\lim_{n \to +\infty} p_n = +\infty$

Mesure de dimension fractale

Aire du flocon de Von Koch

soit :

- c_{n-1} le nombre de nouveaux triangles créés à l'étape n ;
- $a_n = a_{n-1} + c_{n-1} * l_n * \frac{\sqrt{3}}{4} = a_{n-1} + 3 * (\frac{4}{9})^n * \frac{\sqrt{3}}{16}$ est alors l'aire du flocon à l'étape n.

et :

- $a_n = a_0 + \frac{3*\sqrt{3}}{16} * \sum_{k=1}^{n} (\frac{4}{9})^k = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3*\sqrt{3}}{16} * \frac{4}{9} * \frac{1-(\frac{4}{9})^n}{1-\frac{4}{9}}$

d'où l'aire du flocon :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3*\sqrt{3}}{16} * \frac{4}{9} * \frac{9}{5}$
  $= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{12*\sqrt{3}}{80}$
  $= \frac{20*\sqrt{3}}{80} + \frac{12*\sqrt{3}}{80}$
  $= \frac{32*\sqrt{3}}{80}$
  $= \frac{2*\sqrt{3}}{5}$

Mesure de dimension fractale

Dimension fractale du choux de Romanesco

- supposons que chaque division engendre 10 à 15 banches ;
- prenons le maximum, donc 15 ;
- et un facteur de réduction de 3 ;

on a :

- $d = \frac{ln(\frac{15}{1})}{ln(\frac{1}{3})} = \frac{ln(15)}{ln(3)} = 2,46$

Rappel de formule

$d = \frac{ln(\frac{n}{n_i})}{ln(\frac{1}{r})}$ où :

- n est le nombre de branches obtenues après l'itération ;
- n_i est le nombre de branches initiales (1) ;
- r est la réduction.

Conclusion

- nombreuses techniques de générations de fractales ;
- les fractales stochastiques constituent un bon moyen de génération de paysages ;
- une des meilleures méthodes : point médian aléatoire ;
- les IFS sont un excellent moyen de générations des végétaux et de nuages.

Conclusion

Qualités des fractales :

- réalisme remarquable ;
- très importante amplification des données ;
- niveau de détail aussi fin que voulu.

Les techniques les plus abouties demandent encore une puissance de calcul considérable.

Bibliographie

Paul S Addison.
Fractals And Chaos.
Institue of Physics Publishing, London, 1997.

Geoffrey Y. Gardner.
Simulation of Natural Scenes Using Textured Quadric Surfaces.
18(3) :11–20, July 1984.

Aristid LindenMayer.
The Alogirthmic Beauty of Plants.
Springer-Verlag, 1990.

Bernard Sapoval.
Universalités et fractales.
Flammarion, 2000.